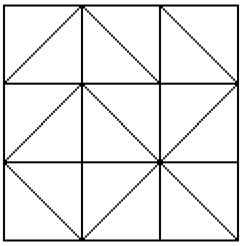
Математическая драка (KAMA Challenge – 2021)

1. В десятичной записи квадратов чисел 1000, 1001, 1002, … отбросили две последние цифры. Оказалось, что несколько первых членов полученной последовательности образуют арифметическую прогрессию. Найдите её последний член.
2. Диагонали четырёхугольника *ABCD*, стороны которого $AB=1$, $BC=5$, $CD=7$, пересекаются под прямым углом. Найдите сторону *AD*.
3. При каком наименьшем *n* число 122….221, содержащее в своей записи *n* двоек, делится нацело на 999999999?
4. Сколько корней имеет уравнение $[tgx]=2\cos^2 x$ на отрезке $[0;10]$?
5. Правильный тетраэдр и правильную четырёхугольную пирамиду, боковая грань которой равна боковой грани тетраэдра, приложили друг к другу так, что их боковые грани совпали. Сколько граней у получившегося многогранника?
6. Квадрат разбит на треугольники (см. рис.). Сколько существует способов закрасить ровно треть квадрата, если маленькие треугольники нельзя закрашивать частично?



7. Сумма нескольких натуральных чисел, в записи каждого из которых участвуют только цифры 3 и 0, равна 55…55 (всего 2022 пятёрки). Какое наименьшее число слагаемых может быть в этой сумме?
8. Из вершины острого угла *A* треугольника *ABC* провели биссектрису *AL*. Величина $\angle ALB=45^0$. Найдите $\angle LHC$, где *H* – основание высоты ΔABC, проведённой из вершины *B*.
9. Гоша выписал в порядке возрастания все делители a_1, a_2, …, a_k натурального числа N (кроме 1 и N). Он заметил, что среди выписанных чисел есть два, отличающиеся ровно в 6 раз. Каково отношение a_k к a_{k-1}?
10. Пусть $x+y+z=14$, а $\frac{1}{x+y}+\frac{1}{y+z}+\frac{1}{z+x}=6$. Найдите значение выражения $\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}$.
11. Дана правильная шестиугольная пирамида *SABCDEF*. Боковое ребро пирамиды равно 5, плоский угол при вершине *S* равен 10^0. Найдите длину кратчайшего пути по поверхности пирамиды, начинающегося и заканчивающегося в точке *A* и пересекающего все боковые рёбра (возможно, в вершинах). (5)
12. В стопку сложены 150 карточек: 50 белых, 50 синих и 50 красных. Для каждой белой карточки подсчитано количество синих, лежащих ниже её,

для каждой синей – количество красных, лежащих ниже её, а для каждой красной – количество белых, лежащих ниже её. Найдите наибольшее возможное значение суммы 150 получившихся чисел.

13. В трапеции $ABCD$ ($AD || BC$) диагонали образуют прямой угол. На большем основании *AD* взята такая точка *M*, что длина отрезка *AM* совпала с длиной средней линии и равна 8. Найдите *MC*.
14. Учитель записал на доске несколько двузначных чисел. Отличник Вася заметил, что каждое число на доске составное, но любые два числа взаимно просты. Какое наибольшее количество чисел, обладающих указанными свойствами, мог записать учитель?
15. Два судна идут по озеру с постоянными скоростями по фиксированным прямолинейным направлениям. В 9 часов расстояние между ними было 20 км, в 9 часов 35 минут – 15 км, в 9 часов 55 минут – 13 км. Каким будет минимальное расстояние между судами?
16. Медианы *AE*, *BF* и *CD* треугольника *ABC* пересекаются в точке *M*. Точки *E, C, F, M* лежат на одной окружности, $CD = 1$. Найдите длину отрезка *AB*. Ответ округлите с точностью до сотых.
17. Если трёхзначное число нельзя представить в виде произведения двух двузначных, то будем называть его «упрямым». Какое наибольшее количество «упрямых» чисел может идти подряд?
18. В клетки прямоугольной таблицы 4х10 Аня расставляет фишки. Какое наибольшее количество фишек ей удастся расставить так, чтобы в каждой строке и в каждом столбце находилось нечётное число фишек?
19. Используя только цифры 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, составим всевозможные семизначные числа. Выделим из них числа, кратные 6. Сколько таких чисел?
20. На стороне *BC* равнобедренного треугольника *ABC* с основанием *AC* взяли точки *P* и *Q* (*P* ближе к *B*, чем *Q*) такие, что $PQ = AQ$ и $\angle QAC = \angle BAP$. Найдите $\angle CAP$.
21. Найдите количество целых решений неравенства
$$\sqrt{4-x} - 2 - x|x-3| - arctgx \leq 0.$$
22. Дано множество, состоящее из 2021 числа, обладающее следующим свойством: если каждый член этого множества заменить на сумму остальных членов, то мы получим исходное множество. Найдите произведение всех членов этого множества.
23. Четверо почти честных жуликов ограбили банк и, спасаясь от погони, спрятали в надёжном месте мешок с золотыми монетами, а сами пустились в бега. Через некоторое время один из них вернулся к месту, где был

спрятан мешок. Пересчитав монеты, он понял, что если он присвоит одну монету, то все остальные разделятся на 4 равные части. Он забрал лишнюю монету и четвёртую часть и снова спрятал мешок. Прошло ещё какое-то время и к тайнику вернулся второй жулик. После пересчёта монет он забрал одну монету и четвёртую часть оставшихся и положил мешок на прежнее место. Так же поступили третий и четвёртый жулики. Какое наименьшее количество монет могло остаться в мешке?

24. Найдите количество натуральных корней уравнения $\left[\frac{x}{2021}\right]=\left[\frac{x}{2022}\right]+1$.

25. Пусть S – сумма всех натуральных чисел от 1 до n включительно, где $360 \le n \le 370$. Известно, что S кратно некоторому простому числу p, однако ни одно из чисел от 1 до n на p не делится. Найдите n.