

Kama Challenge – 2020, Math

1. The teacher wrote three natural numbers on the blackboard, separated by commas, which are consecutive members of an increasing arithmetic progression. Then he erased the commas separating these numbers, and he obtained a seven-digit number. What is the largest number the teacher could get?

Учитель написал на доске через запятую три натуральных числа, являющихся последовательными членами возрастающей арифметической прогрессии. Затем он стёр запятые, разделяющие эти числа, и получилось семизначное число. Какое наибольшее число могло при этом получиться?

Answer (ответ). 9899100.

2. Solve the equation. Write down the number that is reciprocal with the root in the answer:

$$\frac{2019}{x+2019} + \frac{2019 \cdot 2018}{(x+2019)(x+2018)} + \frac{2019 \cdot 2018 \cdot 2017}{(x+2019)(x+2018)(x+2017)} + \dots + \frac{2019 \cdot 2018 \cdot 2017 \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1}{(x+2019)(x+2018)(x+2017) \cdot \dots \cdot (x+2)(x+1)} = 2020.$$

.

Решите уравнение. В ответе запишите число, взаимно обратное с корнем.

Answer (ответ). -2020 .

3. It is known that the reduced quadratic equation $Q(x) = 0$ has a single root, and the equation $Q(Q(Q(x))) = 0$ has exactly 3 different roots. Find these roots. Indicate the sum of the largest and the smallest of the roots in the answer.

Известно, что приведённое квадратное уравнение $Q(x) = 0$ имеет единственный корень, а уравнение $Q(Q(Q(x))) = 0$ имеет ровно 3 различных корня. Найдите эти корни. В ответе укажите сумму большего и меньшего из корней.

Answer (ответ). 2.

4. The numbers 1, 2, 3, ..., 2019, 2020 were written in a row. It is clear that ones were used more often than twos when writing these numbers. How many times?

Подряд написали числа 1, 2, 3, ..., 2019, 2020. Понятно, что единиц при записи этих чисел использовалось больше, чем двоек. На сколько?

Answer (ответ). 988.

5. In the triangle ABC , the median AM is a quarter of the side AB , and the angle $\angle BAM = 60^\circ$. Find the largest angle of this triangle. Write your answer in degrees.

В треугольнике ABC медиана AM составляет четверть стороны AB , а угол $\angle BAM = 60^\circ$. Найдите бóльший угол данного треугольника. Ответ дайте в градусах.

Answer (ответ). 150.

6. Find the length of the boundary of the figure given by the system of inequations. Round your answer to the nearest hundredth.

Найдите длину границы фигуры, заданной системой неравенств. Ответ округлите до сотых.

$$\begin{cases} \sqrt{4 - y^2} \geq x, \\ \sqrt{4 - x^2} \geq y, \\ \arcsin(x + 1) \leq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Answer (ответ). 11,14.

7. Find the smallest function value.

Найдите наименьшее значение функции

$$y = \sqrt{x^2 + 14x + 65} + \sqrt{x^2 + 4x + 68}.$$

Answer (ответ). 13.

8. A car enthusiast, wishing to save up money for the purchase of a car, placed a fund of 40 thousands rubles in a mutual investment fund at 25% per year for four years. At the end of each of three years, the future owner of the car, after accruing interest from the fund, planned to additionally deposit the same fixed amount into the account, so that the final amount of the contribution would increase compared

to the initial one by 620.703125%. What amount (in thousands of rubles) should be added to the deposit annually?

Автолюбитель, желая накопить средства на покупку кабриолета, разместил в паевом инвестиционном фонде вклад в размере 40 тысяч рублей под 25% годовых. В конце каждого из первых трёх лет будущий владелец авто после начисления ему фондом процентов наметил дополнительно вносить на счёт одну и ту же фиксированную сумму, такую, чтобы окончательный размер вклада увеличился по сравнению с первоначальным на 620,703125%. Какую сумму (в тысячах рублей) необходимо ежегодно добавлять к вкладу?

Answer (ответ). 40.

9. Solve the equation. Write the smallest root in your answer.

Решите уравнение. В ответе укажите меньший корень.

$$2\arctg x + \arcsin \frac{2x}{1+x^2} = \pi$$

Answer (ответ). 1.

10. Inside the triangle ABC , the angle A of which is equal to 60° , the point P is taken so that from this point all sides of the triangle are visible at the same angle. Find the area of the triangle RBC if $AP = 2\sqrt[4]{3}$.

Внутри треугольника ABC угол A которого равен 60° , взята точка P так, что из неё все стороны треугольника видны под одним и тем же углом. Найдите площадь треугольника PBC , если $AP = 2\sqrt[4]{3}$.

Answer (ответ). 3.

11. One of the roots of the equation $x^2 + px + q = 0$ is $1 + \sqrt{3}$. Find $p^2 + q^2$ if it is known that the numbers p and q are rational.

Один из корней уравнения $x^2 + px + q = 0$ равен $1 + \sqrt{3}$. Найдите $p^2 + q^2$, если известно, что числа p и q рациональны.

Answer (ответ). 8.

12. The natural numbers a, b, c , taken in this order, form an increasing geometric progression, the denominator of which is an integer. The numbers 2240 and 4312 are divisible by b and c respectively. Find the sum $a + b + c$ if it is known that the sum is maximum under the specified conditions.

Натуральные числа a, b, c , взятые в указанном порядке, образуют возрастающую геометрическую прогрессию, знаменатель которой является целым числом. Числа 2240 и 4312 делятся без остатка на b и c соответственно. Найдите сумму $a + b + c$, если известно, что при указанных условиях она максимальна.

Answer (ответ). 456.

13. Find the smallest z -value if

Найдите наименьшее значение z , если

$$z = x^2 + 2xy + 3y^2 + 2x + 6y + 4.$$

Answer (ответ). 1.

14. Through the vertices K and L of the square $KLMN$, the side of which is equal $\sqrt{2}$, passes a circle that intersects the side KN and the diagonal KM at points A and B respectively, different from the point K . Find the length of the projection of the segment AB onto the line KM .

Через вершины K и L квадрата $KLMN$, сторона которого равна $\sqrt{2}$, проходит окружность, пересекающая сторону KN и диагональ KM в точках A и B соответственно, отличных от точки K . Найдите длину проекции отрезка AB на прямую KM .

Answer (ответ). 1.

15. Solve the equation. Write the largest root in your answer which is satisfying the condition $x \leq 2020$

Решите уравнение. В ответе укажите наибольший корень, удовлетворяющий условию $x \leq 2020$.

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}\left(\cos\frac{\pi}{2}x\right)\right) = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}\left(\sin\frac{\pi}{2}x\right)\right).$$

Answer (ответ). 2019.

16. Solve the equation.

Решите уравнение.

$$\sqrt{4-x} + \sqrt{x-2} = x^2 - 6x + 11.$$

Answer (ответ). 3.

17. The line contains 2020 integers. The first number is 0, and the sum of any three consecutive numbers is equal to 7 or 8. Find the largest value of the last number.

В строку написано 2020 целых чисел. Первое число равно 0, а сумма любых трёх подряд идущих равна 7 или 8. Найдите наибольшее значение числа, стоящего на последнем месте.

Answer (ответ). 673.

18. Du, Ra and Ki are participating in the final of the championship of the planet E-Runda in sacking. The totalizator accepts bets on the victory of each of the participants from the population of the planet. On Du, bets are accepted in the ratio 1: 4. This means that if Du wins, then the player gets his money back and 4 more times of the same amount. On Ra bets are accepted in the ratio 1: 3, on Ki - 1: 1. Money wagered on the losing runner is non-refundable. All bets are expressed as a integer number of fools (local currency). What is the minimum number of fools a gamer in the totalizator should bet in order to guaranteed to win in any result of the competition?

В финале чемпионата планеты Е-Рунда по бегу в мешках участвуют Ду, Ра и Ки. Тотализатор принимает от населения ставки на победу каждого из участников. На Ду ставки принимаются в соотношении 1:4. Это означает, что если Ду выигрывает, то игрок получает назад свои деньги и ещё 4 раза по столько же. На Ра ставки принимаются в соотношении 1:3, на Ки – 1:1. Деньги, поставленные на проигравшего бегуна, не возвращаются. Все ставки выражаются целым числом глупиков (местная валюта). Какое

минимальное число глупиков должен поставить игрок в тотализатор, чтобы гарантированно оказаться в выигрыше при любом исходе соревнования?

Answer (ответ). 19.

19. In the triangle ABC , the heights of the vertices A and C are plotted, which intersect inside the triangle, and the first of them is divided in half by the point of intersection, and the second - in a ratio of 2: 1, counting from the vertex. Find the angle B . Write the answer in degrees.

В треугольнике ABC из вершин A и C опущены высоты, которые пересекаются внутри треугольника, и первая из них точкой пересечения делится пополам, а вторая – в отношении 2 : 1, считая от вершины. Найдите угол B . Ответ дайте в градусах.

Answer (ответ). 45.

20. On the road from village Gadyukino to village Prostokvashino, there are kilometer poles, on each of which the distance to Gadyukino is written on one side, and the distance to Prostokvashino on the other. In the morning the postman Pechkin drove by a pole on which one number was three times greater than the other. After driving another 7 km, Pechkin saw a pole on which the numbers differed exactly 5 times. What is the distance between villages? Write the shortest possible distance (in km) in the answer among all possibilities.

По дороге из Гадюкино в Простоквашино стоят километровые столбы, на каждом из которых с одной стороны написано расстояние до Гадюкино, а с другой – до Простоквашино. Утром почтальон Печкин проезжал мимо столба, на котором одно число было втрое больше другого. Проехав ещё 7 км, Печкин увидел столб, на котором числа отличались ровно в 5 раз. Какое расстояние между деревнями? В ответе из всех вариантов укажите наименьшее возможное расстояние (в км).

Answer (ответ). 12.

21. Five shareholders with equal shares in the authorized capital of the enterprise decide the issue of dividing the funds of their enterprise, which are kept in five different bank accounts. The amounts on these accounts are 143, 233, 313, 410 and 413 conventional monetary units. After the division, each of the accounts will be controlled by only one of the shareholders, and all must have equal

amounts. For the transfer of funds from one account to another, the bank charges 10% of the transferred amount (to receive 100 units, you need to send 110 units). How much money will be on each account with the most saving transfer method?

Пять акционеров, имеющих равные доли в уставном капитале, решают вопрос о разделе денежных средств своего предприятия, которые хранятся на пяти различных банковских счетах. Суммы на этих счетах составляют 143, 233, 313, 410 и 413 у.д.е. После раздела каждый из счетов будет контролироваться только одним из акционеров, и на всех должны быть равные суммы. Банк за перевод денежных средств со счёта на счёт взимает 10% пересылаемой суммы (чтобы пришло 100 у.д.е., надо отправить 110 у.д.е.). Сколько станет денег на каждом счёте при самом экономном способе переводов?

Answer (ответ). 298.

22. The rectangle 2020×7 is divided into squares 1×1 by grid lines. This rectangle is cut along the grid lines into such shapes that each consists of no more than five squares 1×1 . What is the minimum total length of the cutting line?

Прямоугольник 2020×7 линиями сетки разбит на квадраты 1×1 . Этот прямоугольник по линиям сетки разрезается на такие фигуры, что каждая состоит не более чем из пяти квадратов 1×1 . Какова минимальная суммарная длина разрезов?

Answer (ответ). 12113.

23. How many digits does the number have in its notation, which will form if the decimal notation of the number 25^{125} is added to the right to the decimal notation of the number 32^{50} ?

Сколько цифр в своей записи имеет число, которое получится, если к десятичной записи числа 32^{50} справа приписать десятичную запись числа 25^{125} ?

Answer (ответ). 251.

24. Find all values of a from the interval $[1; +\infty)$, for each of which the largest of the roots of the equation $x^2 - 6x + 2ax + a - 13 = 0$ takes the greatest value.

Найдите все значения a из промежутка $[1; +\infty)$, при каждом из которых больший из корней уравнения принимает наибольшее значение:

$$x^2 - 6x + 2ax + a - 13 = 0$$

Answer (ответ). 1.

25. A circle passes through the vertices A and B of triangle ABC and intersects the sides AC and BC at points M and N respectively. It turned out that the center of the circle inscribed in this triangle lies on the segment MN . Find MN if $AB = 40$, $AC = 35$, $BC = 25$.

Через вершины A и B треугольник ABC проходит окружность, которая пересекает стороны AC и BC в точках M и N соответственно. Оказалось, что центр вписанной в этот треугольник окружности лежит на отрезке MN . Найдите MN , если $AB = 40$, $AC = 35$, $BC = 25$.

Answer (ответ). 24.