0:0

Сколько решений, удовлетворяющих условию $1 < x < 5$, имеет уравнение

$$\{x[x]\} = \frac{1}{2}\,?$$

(здесь $[x]$ – целая, а $\{x\}$ – дробная части числа x)

Ответ: 10.

0:1

Каким наименьшим количеством цифр можно обойтись, если, записав их подряд, мы могли бы путем вычеркивания некоторых цифр получить любое трехзначное число от 100 до 999?

Ответ: 29.

0:2

В некотором невисокосном году понедельников больше, чем пятниц. Какой из дней недели чаще всего встречается в следующим за этим тоже невисокосном году.

Ответ: вторник.

0:3

Ученик написал на доске три натуральных числа, являющихся последовательными членами одной арифметической прогрессии. Затем он стер разделявшие эти числа запятые, и получилось семизначное число. Какое наибольшее число могло при этом получиться?

Ответ: 9995049.

0:4

Про два числа x и y известно следующее:

если $x \geq 0$, то $y = 1 - x$;

если $y \leq 1$, то $x = 1 + y$;

если $x \leq 1$, то $x = |1 + y|$.

Найдите x и y.

Ответ: $x = 1,\ y = 0$.

0:5

Найдите наименьшее значение выражения

$16 \cdot \frac{x^3}{y} + \frac{y^3}{x} - \sqrt{xy}.$

Ответ: $-\frac{1}{32}$.

0:6

Внутри треугольника ABC с углом $BAC = 60^0$ взята точка Q так, что углы AQB, BQC и CQA равны по 120^0. Длина отрезка $AQ = 2$. Найдите площадь треугольника BQC.

Ответ: $\sqrt{3}$.

1:1

Перемножив все натуральные числа от 1 до своего возраста включительно, Федя получил число

8 841 761 993 739 701 954 543 616 000 000.

Сколько лет Феде?

Ответ: 29.

1:2

В детском парке было несколько песочниц. После изменения концепции парка количество песочниц сократилось, причем число процентов, на которое уменьшилось число песочниц, оказалось равным числу оставшихся песочниц. Какое наименьшее число песочниц могло быть в парке до вмешательства реформаторов?

Ответ: 25.

1:3

В треугольнике ABC медиана, проведенная из вершины A к стороне BC, в четыре раза меньше стороны AB и образует с ней угол в 60^0. Найдите наибольший угол данного треугольника.

Ответ: 150^0.

1:4

Решите уравнение

$$2\sqrt{1+x\sqrt{1+(x+1)\sqrt{1+(x+2)\sqrt{1+(x+3)(x+5)}}}}=x.$$

Ответ: корней нет.

1:5

Окружность проходит через вершины A и B квадрата $ABCD$ со стороной 1 и пересекает прямые AD и AC в точках P и Q, отличных от A. Найдите длину проекции отрезка PQ на прямую AC.

Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

1:6

По окружности рассажены n деревьев. Известно, что среди всевозможных расстояний между двумя деревьями не более 100 различных. Каково наибольшее возможное значение числа n?

Ответ: 201.

2:2

Игрушечная машинка может двигаться по прямой, а по команде с пульта поворачивается налево ровно на 17^0 (относительно прежнего направления движения). Машинка выезжает из некоторой точки и начинает двигаться по прямой. Какое наименьшее количество команд требуется, чтобы игрушка вновь прошла через точку старта?

Ответ: 11.

2:3

Подряд записали числа 1, 2, 3, …, 2017, 2018. Каких цифр в записи этих чисел было использовано больше – единиц или двоек? На сколько?

Ответ: единица чаще двойки на 990 раз.

2:4

В студенческой конференции участвуют студенты пяти различных университетов (от одного университета может быть несколько представителей). Все участники конференции расселись за круглым столом так, что для любых двух университетов (из данных пяти) найдутся студенты этих университетов, сидящие рядом. Какое наименьшее число студентов может участвовать в конференции?

Ответ: 10.

2:5

Решите уравнение

$|\cos 3x - tgx| + |\cos 3x + tgx| = |tg^2 x - 3|$.

Ответ: $x = \pm\frac{\pi}{4} + \pi n,\ x = \pm arctg3 + \pi k,\ n, k \in Z.$

2:6

Высоты AA_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются внутри треугольника в точке K, причем $AK = A_1K$, а $CK : C_1K = 2 : 1$. Найдите угол B.

Ответ: 45^0.

3:3

В некотором царстве, в некотором государстве проводят выборы в Думу. Две трети избирателей в этой стране являются членами Красной партии, а одна треть – Белой. Царь должен предложить на утверждение проект состава Думы на 100 человек. Известно, что за проект проголосует столько процентов красных (белых), сколько человек из партии Красных (Белых) в предложенном проекте. Какое наименьшее число из партии Красных надо включить в проект состава Думы, чтобы за него проголосовало более половины избирателей?

Ответ: 51.

3:4

Пять человек, живущих в разных городах, получили зарплату, одни больше, другие меньше (143, 233, 313, 410 и 413 тугриков). Каждый из них может послать деньги другому по почте. При этом почта берет за перевод 10% пересылаемой суммы денег (чтобы пришло 100 тугриков, надо послать на 10% больше, то есть 110 тугриков). Они хотят переслать деньги так, чтобы у каждого оказалась одна и та же сумма денег, а почта, при этом, получила как можно меньше. Сколько денег будет у каждого при самом экономном способе пересылки?

Ответ: 298.

3:5

Четыре различных числа, являющиеся корнями уравнений $x^2 + px + q = 0$ и $x^2 + qx + p = 0$, в некотором порядке образуют арифметическую прогрессию. Найдите p и q.

Ответ: $p = 0$, $q = -4$ или $p = -4$, $q = 0$.

3:6

В треугольнике ABC угол A равен α, а высота, проведенная к стороне BC, равна h. Вписанная в треугольник ABC окружность касается сторон треугольника в точках K, M и P, где P лежит на стороне BC. Найдите расстояние от P до KM.

Ответ: $h\sin\frac{\alpha}{2}$.

4:4

Вычислите $f\left(\sqrt[3]{2} - 1\right)$, где

$$f(x) = x^{2019} + 3x^{2018} + 4x^{2017} + 2x^{2016} + 4x^{2015} + 2x^{2014} + 4x^{2013} + \\ +2x^{2012} + \cdots + 4x^3 + 2x^2 + 3x + 1.$$

Ответ: 2.

4:5

Известно, что уравнение

$5x^6 - 16x^4 - 33x^3 - 40x^2 + 8 = 0$,

имеет два таких корня, что их произведение равно 1. Найдите эти корни.

Ответ: $\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$.

4:6

Решите уравнение

$$\sqrt{2 + \sqrt{2 - \sqrt{2 + x}}} = x.$$

Ответ: $2\cos\frac{2\pi}{9}$.

5:5

В левом нижнем углу шахматной клетки 8×8 стоит король. За один ход он может передвинуться либо на одну клетку вправо, либо на одну клетку вверх, либо на одну клетку по диагонали – вправо и вверх. Сколькими различными путями король может пройти в правый верхний угол?

Ответ: 48639.

5:6

Из 9 человек, вышедших в финальную часть конкурса, только четыре должны получить приз. Претендентов перенумеровали и выстроили по кругу. Затем было определено некоторое число m (возможно, большее 9) и направление отсчёта. Людей начали пересчитывать, начиная с первого. Каждый m-й становился победителем и выбывал из розыгрыша, а счет, начиная со следующего, продолжался до тех пор, пока не выявили четырех победителей. Первые три приза получили три человека, имевшие в исходной расстановке номера 2, 7 и 5 (именно в такой последовательности они выбывали). Какой номер в начальной расстановке имел четвёртый победитель конкурса?

Ответ: 3 или 6.

6:6

Сколько различных подмножеств, не содержащих трёх последовательных чисел, можно выбрать из множества чисел $\{1, 2, 3, \dots, 11\}$ (включая пустое множество)?

Ответ: 927.