

Кама Challenge – 2020, математика

1. Учитель написал на доске через запятую три натуральных числа, являющихся последовательными членами возрастающей арифметической прогрессии. Затем он стёр запятые, разделяющие эти числа, и получилось семизначное число. Какое наибольшее число могло при этом получиться?

Ответ. 9899100.

2. Решите уравнение

$$\frac{2019}{x+2019} + \frac{2019 \cdot 2018}{(x+2019)(x+2018)} + \frac{2019 \cdot 2018 \cdot 2017}{(x+2019)(x+2018)(x+2017)} + \dots + \frac{2019 \cdot 2018 \cdot 2017 \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1}{(x+2019)(x+2018)(x+2017) \cdot \dots \cdot (x+2)(x+1)} = 2020.$$

В ответе запишите число, взаимно обратное с корнем.

Ответ. $-\frac{1}{2020}$.

3. Известно, что приведённое квадратное уравнение $Q(x)=0$ имеет единственный корень, а уравнение $Q(Q(Q(x)))=0$ имеет ровно 3 различных корня. Найдите эти корни. В ответе укажите сумму большего и меньшего из корней.

Ответ. 2.

4. По ряд написали числа 1, 2, 3, ..., 2019, 2020. Понятно, что единиц при записи этих чисел использовалось больше, чем двоек. На сколько?

Ответ. 988.

5. В треугольнике ABC медиана AM составляет четверть стороны AB , а угол $\angle BAM = 60^\circ$. Найдите бóльший угол данного треугольника. Ответ дайте в градусах.

Ответ. 150.

6. Найдите длину границы фигуры, заданной системой неравенств

$$\begin{cases} \sqrt{4-y^2} \geq x, \\ \sqrt{4-x^2} \geq y, \\ \arcsin(x+1) \leq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Ответ округлите до сотых.

Ответ. 11,14.

7. Найдите наименьшее значение функции

$$y = \sqrt{x^2 + 14x + 65} + \sqrt{x^2 + 4x + 68}.$$

Ответ. 13.

8. Автолюбитель, желая накопить средства на покупку кабриолета, разместил в паевом инвестиционном фонде вклад в размере 40 тысяч рублей на 4 года под 25% годовых. В конце каждого из первых трёх лет будущий владелец авто после начисления ему фондом процентов наметил дополнительно вносить на счёт одну и ту же фиксированную сумму, такую, чтобы окончательный размер вклада увеличился по сравнению с первоначальным на 620,703125%. Какую сумму (в тысячах рублей) необходимо ежегодно добавлять к вкладу?

Ответ. 40.

9. Решите уравнение

$$2\arctg x + \arcsin \frac{2x}{1+x^2} = \pi.$$

В ответе укажите меньший корень.

Ответ. 1.

10. Внутри треугольника ABC угол A которого равен 60° , взята точка P так, что из неё все стороны треугольника видны под одним и тем же углом. Найдите площадь треугольника PBC , если $AP = 2\sqrt[4]{3}$.

Ответ. 3.

11. Один из корней уравнения $x^2 + px + q = 0$ равен $1 + \sqrt{3}$. Найдите $p^2 + q^2$, если известно, что числа p и q рациональны.

Ответ. 8.

12. Натуральные числа a, b, c , взятые в указанном порядке, образуют возрастающую геометрическую прогрессию, знаменатель которой является целым числом. Числа 2240 и 4312 делятся без остатка на b и c соответственно. Найдите сумму $a + b + c$, если известно, что при указанных условиях она максимальна.

Ответ. 456.

13. Найдите наименьшее значение z , если

$$z = x^2 + 2xy + 3y^2 + 2x + 6y + 4.$$

Ответ. 1.

14. Через вершины K и L квадрата $KLMN$, сторона которого равна $\sqrt{2}$, проходит окружность, пересекающая сторону KN и диагональ KM в точках A и B соответственно, отличных от точки K . Найдите длину проекции отрезка AB на прямую KM .

Ответ. 1.

15. Решите уравнение

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}\left(\cos\frac{\pi}{2}x\right)\right) = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}\left(\sin\frac{\pi}{2}x\right)\right).$$

В ответе укажите наибольший корень, удовлетворяющий условию $x \leq 2020$.

Ответ. 2019.

16. Решите уравнение

$$\sqrt{4-x} + \sqrt{x-2} = x^2 - 6x + 11.$$

Ответ. 3.

17. В строку написано 2020 целых чисел. Первое число равно 0, а сумма любых трёх подряд идущих равна 7 или 8. Найдите наибольшее значение числа, стоящего на последнем месте.

Ответ. 673.

18. В финале чемпионата планеты Е-Рунда по бегу в мешках участвуют Ду, Ра и Ки. Тотализатор принимает от населения ставки на победу каждого из участников. На Ду ставки принимаются в соотношении 1:4. Это означает, что если Ду выигрывает, то игрок получает назад свои деньги и ещё 4 раза по столько же. На Ра ставки принимаются в соотношении 1:3, на Ки – 1:1. Деньги, поставленные на проигравшего бегуна, не возвращаются. Все ставки выражаются целым числом глупиков (местная валюта). Какое минимальное число глупиков должен поставить игрок в тотализатор, чтобы гарантированно оказаться в выигрыше при любом исходе соревнования?

Ответ. 19.

19. В треугольнике ABC из вершин A и C опущены высоты, которые пересекаются внутри треугольника, и первая из них точкой пересечения делится пополам, а вторая – в отношении 2 : 1, считая от вершины. Найдите угол B . Ответ дайте в градусах.

Ответ. 45.

20. По дороге из Гадюкино в Простоквашино стоят километровые столбы, на каждом из которых с одной стороны написано расстояние до Гадюкино, а с другой – до Простоквашино. Утром почтальон Печкин проезжал мимо столба, на котором одно число было втрое больше другого. Проехав ещё 7 км, Печкин увидел столб, на котором числа отличались ровно в 5 раз. Какое расстояние между деревнями? В ответе из всех вариантов укажите наименьшее возможное расстояние (в км).

Ответ. 12.

21. Пять акционеров, имеющих равные доли в уставном капитале, решают вопрос о разделе денежных средств своего предприятия, которые хранятся на пяти различных банковских счетах. Суммы на этих счетах составляют 143, 233, 313, 410 и 413 у.д.е. После раздела каждый из счетов будет контролироваться только одним из акционеров, и на всех должны быть равные суммы. Банк за перевод денежных средств со счёта на счёт взимает

10% пересылаемой суммы (чтобы пришло 100 у.д.е., надо отправить 110 у.д.е.). Сколько станет денег на каждом счёте при самом экономном способе переводов?

Ответ. 298.

22. Прямоугольник 2020×7 линиями сетки разбит на квадраты 1×1 . Этот прямоугольник по линиям сетки разрезается на такие фигуры, что каждая состоит не более чем из пяти квадратов 1×1 . Какова минимальная суммарная длина разрезов?

Ответ. 12113.

23. Сколько цифр в своей записи имеет число, которое получится, если к десятичной записи числа 32^{50} справа приписать десятичную запись числа 25^{125} ?

Ответ. 251.

24. Найдите все значения a из промежутка $[1; +\infty)$, при каждом из которых больший из корней уравнения

$$x^2 - 6x + 2ax + a - 13 = 0$$

принимает наибольшее значение.

Ответ. 1.

25. Через вершины A и B треугольника ABC проходит окружность, которая пересекает стороны AC и BC в точках M и N соответственно. Оказалось, что центр вписанной в этот треугольник окружности лежит на отрезке MN . Найдите MN , если $AB = 40$, $AC = 35$, $BC = 25$.

Ответ. 24.