

1. Пусть $(x_0; y_0)$ – решение системы уравнений

$$\begin{cases} y + \sqrt{16 - x^2} = 0, \\ y + 1 = |x + 5|. \end{cases}$$

Какие значения может принимать разность $y_0 - x_0$?

3. Найдите какие-нибудь пять натуральных чисел из первой сотни, модуль разности любых двух из которых равен наибольшему общему делителю этой пары чисел.

5. Каждый из 25 одноклассников участвовал в трёх разных олимпиадах. Оказалось, что любые четверо из них участвовали в одной и той же олимпиаде. В каком наибольшем количестве различных олимпиад могли участвовать ученики этого класса?

7. Сколько существует семизначных чисел, в которых каждая цифра, кроме последней, делится на следующую за ней справа цифру?

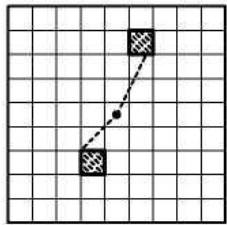
2. Диагонали трапеции $KMPT$ с основаниями MP и KT пересекаются в точке C . Площадь треугольника MCP равна 4, $KT = 2MP$. Найдите площадь трапеции.

4. BM и CH – высоты треугольника ABC , I – центр его вписанной окружности. Известно, что $BC = 24$, $MH = 12$. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника BCI .

6. Какое наибольшее число шахмат можно поставить на шахматную доску (не более одной шашки на каждое поле), если: 1) на поле $e4$ шашку ставить нельзя; 2) никакие две шашки не могут стоять на полях, симметричных, относительно поля $e4$?

8. Последовательность $\{a_n\}$ определяется следующим образом: $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + (n+1)$ для любого натурального n . Чему равна сумма $a_{2019} + a_{2020}$? Ответ дать числом в десятичной записи.

9. Закрасьте 12 клеток в квадрате 9×9 так, чтобы из центра квадрата не были видны его стороны (т.е. любой луч, выходящий из центра, задевал какую-нибудь закрашенную клетку хотя бы по углу – см.рис.). Нельзя закрашивать клетки, соседние по стороне или углу, а также центральную клетку.



11. Решите в положительных числах уравнение:

$$x + y + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + 4 = 2(\sqrt{2x+1} + \sqrt{2y+1}).$$

13. Сколько дробей из бесконечной серии $\frac{2019}{19}; \frac{2020}{20}; \frac{2021}{21} \dots$ являются целыми числами?

15. Координаты точек $A(a; b)$, $B(c; d)$, $C(e; f)$ удовлетворяют равенствам $a^2 - 4a + b^2 - 2b + 2 = 0$, $c^2 - 4c + d^2 - 2d + 2 = 0$, $e^2 - 4e + f^2 - 2f + 2 = 0$. Какую наибольшую площадь может иметь треугольник ABC ?

10. Дан равносторонний треугольник ABC . Точка K – середина стороны AB , точка M лежит на стороне BC , причём $BM:MC=1:2$. На стороне AC выбрана точка P так, что периметр треугольника PKM – наименьший из возможных. В каком отношении точка P делит сторону AC , считая от точки A ?

12. Найдите наибольшее натуральное число из различных цифр, у которого любая группа подряд идущих цифр даёт число, делящееся на количество цифр в этой группе.

14. Какие значения может принимать функция $f(x) = \cos(\cos x) - \sin x$?

16. Наименьший нечётный делитель натурального числа n , отличный от 1, равен d , а наибольший нечётный делитель n равен числу $D > d$. Оказалось, что $n = 3D + 5d$. Найдите все такие n .